

**B03-102**

## **Beräkningsanvisning för strukturrepons Central differensmetod**

Författare: Morgan Johansson. Ansvarig utgivare: Björn Ekengren.

<b>1 Orientering</b>	<b>1</b>
1.1 Samlingsdokument	1
1.2 Om detta dokument	1
<b>2 Numerisk lösningsmetod</b>	<b>2</b>
2.1 Linjär respons	2
2.2 Olinjär respons	3
2.3 Stabilitet	4

---

## **1 Orientering**

### **1.1 Samlingsdokument**

För allmän information om MSB:s kunskapsdokument i serien Beräkning av impulsbelastade konstruktioner, se dokument B01-101. Där ges bland annat övergripande bakgrund, en sammanfattande beteckningslista samt referenser. För en förteckning av utgivna och kommande dokument i serien hänvisas till dokument B01-102.

### **1.2 Om detta dokument**

I detta dokument ges en beskrivning av Central differensmetod som är en explicit, numerisk lösningsmetod som kan användas för att beräkna den dynamiska responsen hos en impulsbelastad konstruktion. Metoden är ett komplement att användas för mer detaljerade beräkningar än de handberäkningsmetoder som presenteras i dokument B02-101 och kan användas vid godtycklig strukturrepons och godtycklig last.

## 2 Numerisk lösningsmetod

### 2.1 Linjär respons

Central differensmetod är en explicit lösningsmetod för att lösa den dynamiska grundekvationen

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (2.1)$$

där  $m$ ,  $c$ ,  $k$  och  $F(t)$  är massa, dämpning, styvhet respektive yttre last samt  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$  och  $u$  är acceleration, hastighet respektive förskjutning.

Med explicit lösningsmetod menas att lösning av förskjutningen  $u$  vid tiden  $t+\Delta t$ , här betecknat som  ${}^{t+\Delta t}u$ , beräknas utgående från en jämvikt vid tiden  $t$ . Detta innebär att ekvation (2.1) kan skrivas som

$$m^t \ddot{u} + c^t \dot{u} + k^t u = F(t) \quad (2.2)$$

där indexet anger tidpunkten som den aktuella parametern tillhör. Så till exempel syftar  ${}^t \ddot{u}$  på accelerationen vid tiden  $t$  och  ${}^{t+\Delta t} \dot{u}$  på hastigheten vid tiden  $t+\Delta t$ . Massan  $m$ , dämpningen  $c$  och styvheten  $k$  gäller samtliga för tiden  $t$ , dvs.  $m = {}^t m$ ,  $c = {}^t c$  samt  $k = {}^t k$ .

I central differensmetod ansätts accelerationen vid tiden  $t$  till

$${}^t \ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} u - 2{}^t u + {}^{t-\Delta t} u) \quad (2.3)$$

och hastigheten vid tiden  $t$  till

$${}^t \dot{u} = \frac{1}{2\Delta t} ({}^{t+\Delta t} u - {}^{t-\Delta t} u) \quad (2.4)$$

vilket insatt i ekvation (2.2) ger att förskjutningen vid tiden  $t+\Delta t$  kan skrivas som

$${}^{t+\Delta t} u = \left( \frac{{}^t m}{\Delta t^2} + \frac{{}^t c}{2\Delta t} \right)^{-1} \left( F(t) - \left[ {}^t k - \frac{2{}^t m}{\Delta t^2} \right] {}^t u - \left[ \frac{{}^t m}{\Delta t^2} - \frac{{}^t c}{2\Delta t} \right] {}^{t-\Delta t} u \right) \quad (2.5)$$

Det kan noteras att samtliga termer i högerledet är från tiden  $t$  eller  $t-\Delta t$ , vilket innebär att förskjutningen  ${}^{t+\Delta t} u$  kan lösas ut direkt från redan känd information. Sätts dämpningen till noll,  ${}^t c = 0$ , vilket för en impulsbelastad konstruktion är en rimlig approximation på säker sida, så kan ekvation (2.5) förenklas till

$${}^{t+\Delta t} u = \Delta t^2 {}^t m^{-1} \left( F(t) - \left[ {}^t k - \frac{2{}^t m}{\Delta t^2} \right] {}^t u - \frac{{}^t m}{\Delta t^2} {}^{t-\Delta t} u \right) \quad (2.6)$$

Av ekvation (2.5) och (2.6) framgår att centrala differensmetoden inte är självstartande eftersom det vid beräkning av förskjutningen  ${}^{\Delta t}u$  i det första tidssteget behövs information om förskjutningen vid tiden  $-\Delta t$ . För att lösa detta används ett särskilt startsteg vilket uttrycks som

$${}^{-\Delta t}u = {}^0u - \Delta t {}^0\dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{u} \quad (2.7)$$

och som behöver användas i en numerisk beräkning för att kunna starta analysen.

## 2.2 Olinjär respons

I ekvation (2.6), ges ett uttryck för att beräkna förskjutningen  ${}^{t+\Delta t}u$  utgående från information i föregående tidssteg  $t$  och  $t-\Delta t$ . Vid härledning av detta uttryck har en linjärelastisk materialrespons förutsatts i form av styvheten  $k$ . Det är dock relativt enkelt att även nyttja dessa uttryck för ett fall med olinjär materialrespons. Eftersom styvheten  $k = {}^t k$  anges för tiden  $t$  vid beräkning av förskjutningen vid tiden  $t+\Delta t$  så är det möjligt att använda en sekantstyvhet för att beskriva en olinjär respons. Genom att låta  ${}^t k = {}^t k({}^t u) = k(u(t))$ , dvs. styvheten vid tiden  $t$  är en funktion av aktuell respons  $u(t)$ , så kan en godtycklig materialrespons beräknas.

För ett system med elastisk respons så gäller för styvheten att

$${}^t k = k = \text{konstant} \quad (2.8)$$

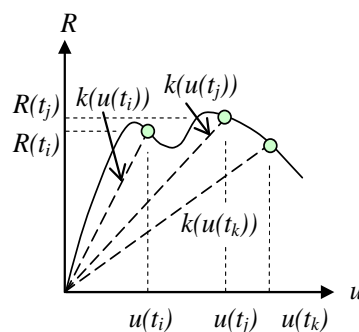
medan den för ett system med godtycklig respons istället utgör sekantstyvheten i aktuellt tidssteg såsom illustreras i Figur 2.1, dvs.

$${}^{t_i} k \neq {}^{t_j} k \neq {}^{t_k} k \quad (2.9)$$

Det som egentligen är av intresse att beskriva med  ${}^t k$  i ekvation (2.6) är inte styvheten som sådan utan den inre kraft

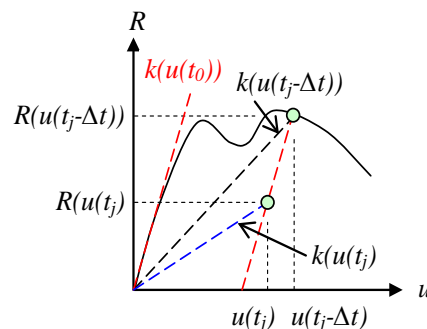
$${}^t R = {}^t k \cdot {}^t u \quad (2.10)$$

som är verksam i tidssteget  $t$ .



Figur 2.1 Tangentstyvhet  $k$  vid tiden  $t$  för system med godtycklig respons.

På samma sätt kan styvheten på avlastningen anpassas efter önskat fall. Genom att i beräkningarna hålla reda på om aktuell styvhet ska motsvara en av- eller pålastning kan styvheten anpassas efter aktuellt förhållande. Exempelvis är det möjligt att för en plastisk respons låta av- och pålastningen motsvara en önskad linjärelastisk styvhet för att vid en ökad deformation, med växande plastiska töjningar, låta aktuell sekantstyvhet ta över. I Figur 2.2 illustreras hur en avlastning sker vid tiden  $t_j$ . För ett system med plastiska egenskaper kommer en sådan avlastning ske med en styvhet motsvarande den inledande tangentstyvheten, dvs. med styvhet  $k(u(t_0))$ . Efter en elastisk avlastning från förskjutning  $u(t_j - \Delta t)$  till  $u(t_j)$  ska i nästa tidssteg,  $t_j + \Delta t$ , en styvhet  $k(u(t_j))$  användas i ekvation (2.6) för att korrekt beskriva den inre kraft  $R(u(t_j))$  som verkar i systemet för att beräkna förskjutningen  $u(t_j + \Delta t)$ .



Figur 2.2 Styvhet vid avlastning för system med plastiska egenskaper.

### 2.3 Stabilitet

Att en lösning är stabil innebär att felaktigheter i begynnelsevillkoren, på grund av exempelvis avrundningsfel, inte växer i den fortsatta beräkningen. Om nyttjat tidssteg är för stort,  $\Delta t \geq \Delta t_{kr}$ , fås ett fel som växer till sådana proportioner att lösningen snabbt blir oanvändbar.

Centrala differensmetoden är villkorligt stabil vilket innebär att tidssteget  $\Delta t$  måste understiga ett sådant minsta kritiskt tidssteg  $\Delta t_{kr}$  för att en acceptabel lösning ska erhållas. Detta kritiska tidssteg kan uttryckas som

$$\Delta t_{kr} = \frac{2}{\omega} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.11)$$

Uppfylls inte detta villkor fungerar inte lösningsmetoden. Det ska dock poängteras att det av noggrannhetsmässiga skäl, framförallt för ett enfrihetsgradsystem, kan vara nödvändigt med ett betydligt mindre tidssteg. Vilket tidssteg som är lämpligt i ett givet fall beror på en kombination av lastens utformning och systemets responstid men ett tidssteg av en storleksordning motsvarande en hundradel av lastens varaktighet fungerar ofta bra. Dvs. valt tidssteg  $\Delta t_l$  bör uppfylla

$$\Delta t_l \leq \begin{cases} \Delta t_{kr} \\ \frac{t_l}{100} \end{cases} \quad (2.12)$$

där  $t_l$  är lastens varaktighet.